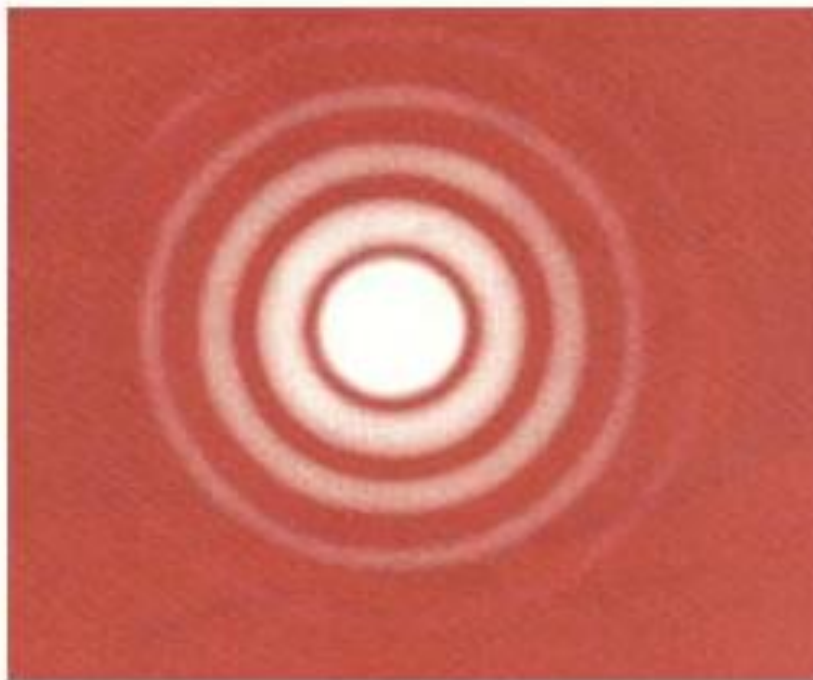


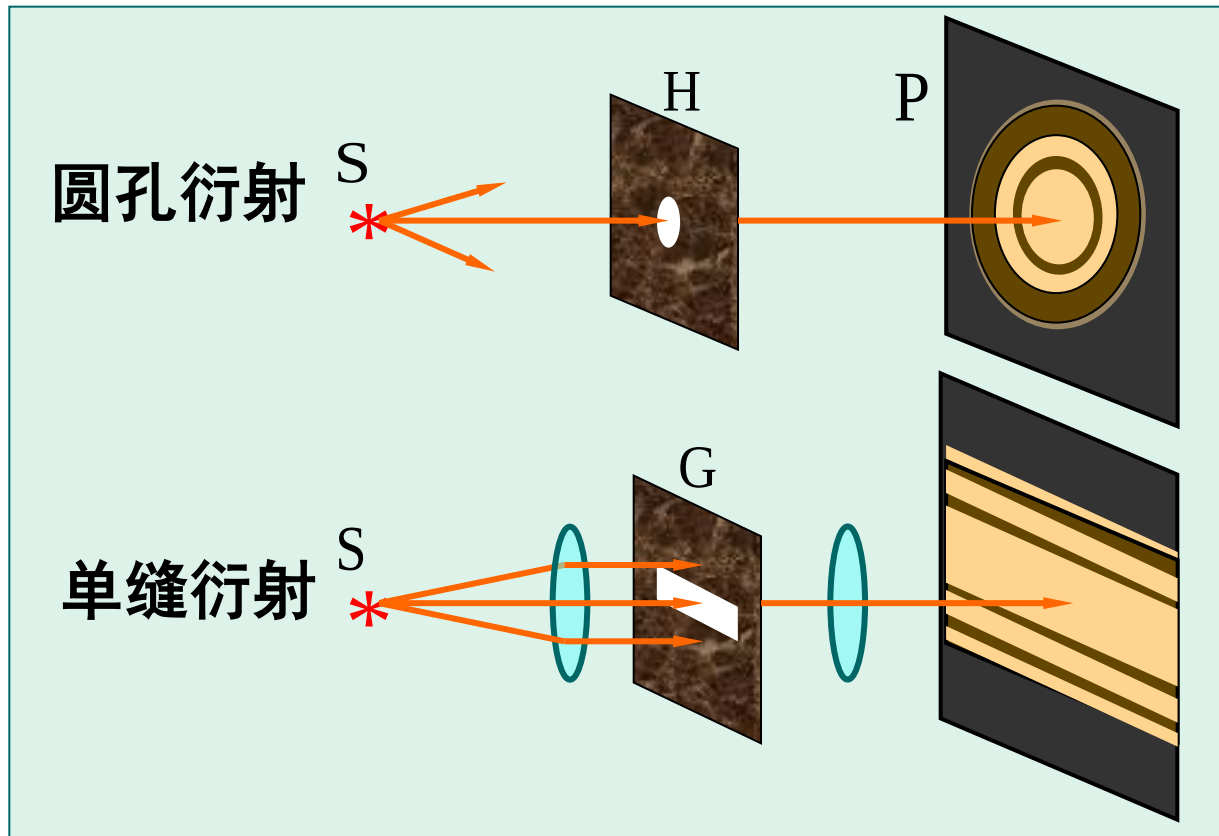
# 第13章 光的衍射



菲涅耳衍射

# § 13.1 惠更斯—菲涅耳原理

## 一. 光的衍射现象



**衍射：**光在传播过程中绕过障碍物的边缘而偏离直线传播的现象

★ **说明** 衍射现象是否明显取决于障碍物线度与波长的对比，波长越大，障碍物越小，衍射越明显。

## 二. 惠更斯—菲涅耳原理

### 1. 原理内容

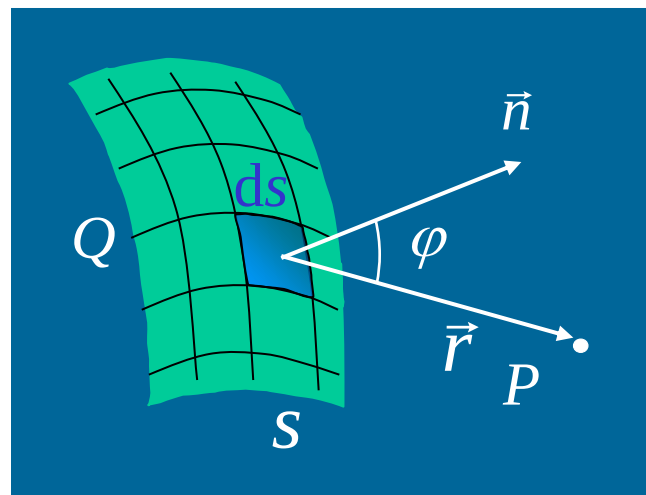
- 同一波面上的各点发出的次波是相干波。
- 各次波在空间某点的相干叠加，就决定了该点波的强度。

### 2. 原理数学表达

设初相为零，面积为 $S$ 的波面  $Q$ ，其上面元 $ds$  在 $P$ 点引起的振动为

$$dE_{(p)} \propto \frac{k(\varphi)ds}{r} \cos(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})$$

$$dE_{(p)} = F(Q) \frac{k(\varphi)ds}{r} \cos(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})$$

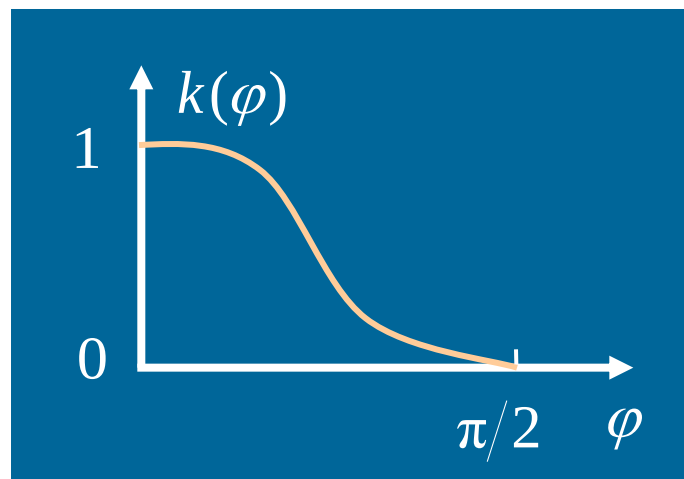


$F(Q)$  取决于波面上 $ds$ 处的波强度， $k(\varphi)$  为倾斜因子.

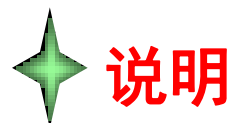
$$\varphi = 0, k = k_{\max} = 1$$

$$\varphi \uparrow \quad \longrightarrow \quad k(\varphi) \downarrow$$

$$\varphi \geq \frac{\pi}{2}, \quad k = 0$$



$$E_{(p)} = \iint_s \frac{F(Q) \cdot k(\varphi)}{r} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) \cdot ds$$

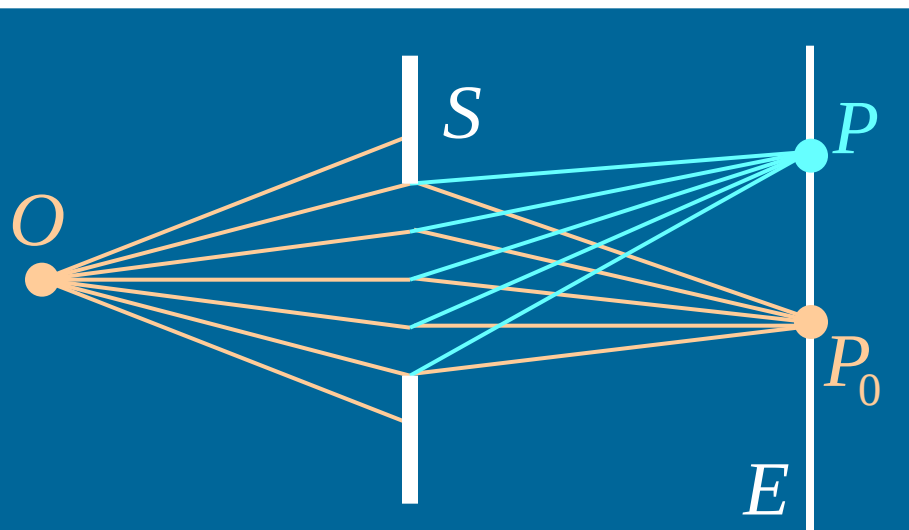


- (1) 对于一般衍射问题，用积分计算相当复杂，实际中常用半波带法和振幅矢量法分析。
- (2) 惠更斯—菲涅耳原理在惠更斯原理的基础上给出了次波源在传播过程中的振幅变化及位相关系。

### 三. 光的衍射分类

#### 1. 菲涅耳衍射 (近场衍射)

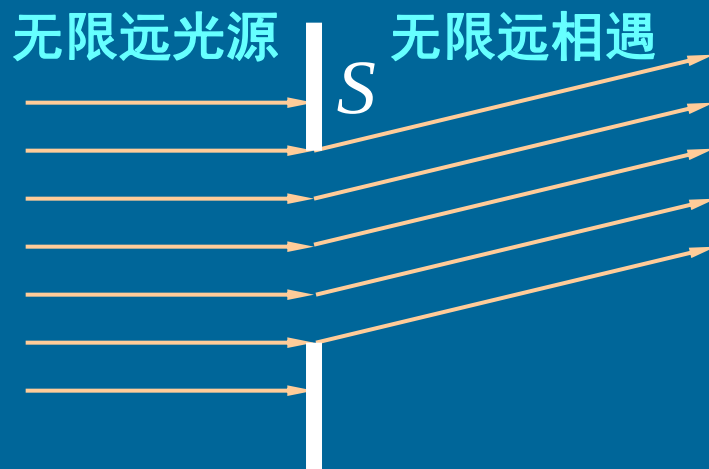
光源 $O$ , 观察屏 $E$  (或二者之一) 到衍射屏 $S$  的距离为有限的衍射, 如图所示。



( 菲涅耳衍射 )

#### 2. 夫琅禾费衍射 (远场衍射)

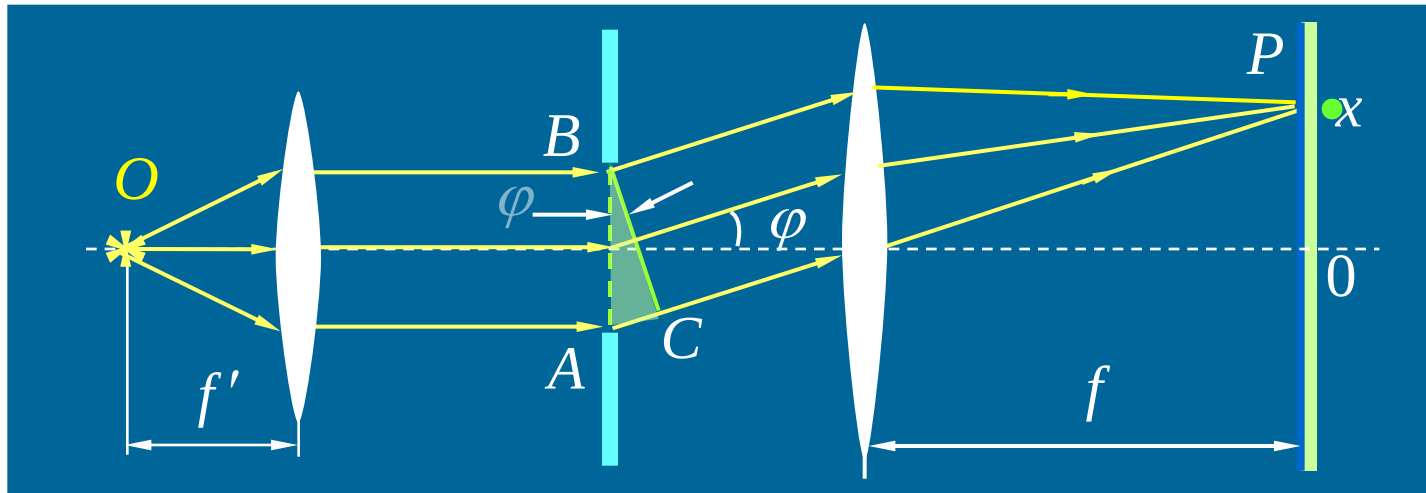
光源 $O$ , 观察屏 $E$  到衍射屏 $S$  的距离均为无穷远的衍射, 如图所示。



( 夫琅禾费衍射 )

## § 13.2 单缝的夫琅禾费衍射

### 一. 典型装置



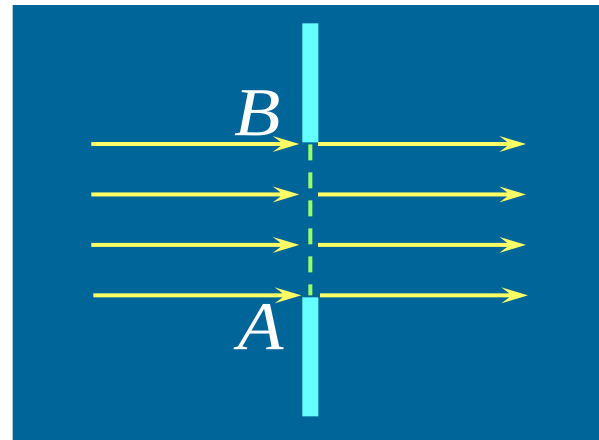
( 单缝夫琅禾费衍射典型装置 )

$A, B \rightarrow P$  的光程差  $\Delta = AC = a \sin \varphi$  ( $a$  为缝  $AB$  的宽度 )

### 二. 菲涅耳半波带法

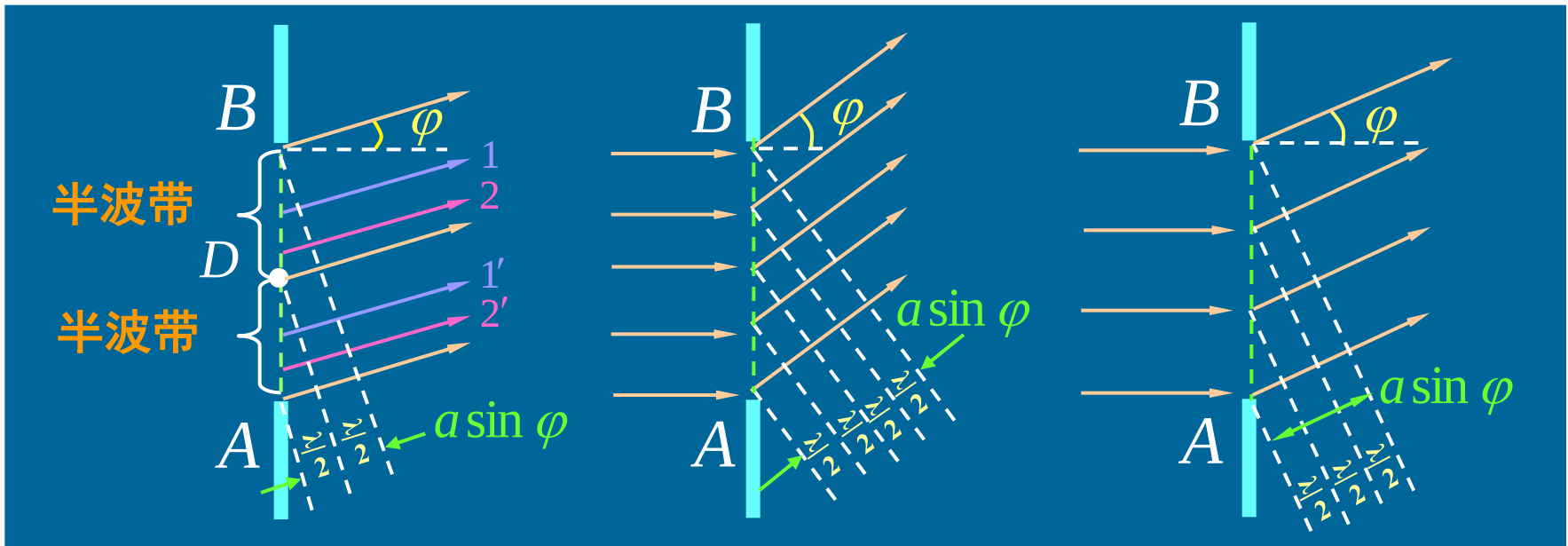
#### 1. 衍射暗纹、明纹条件

$$a \sin \varphi = 0 \text{ —— 中央明纹}$$



$a \sin \varphi = 2 \frac{\lambda}{2}$  此时缝分为两个“半波带”， $P$  为暗纹。

暗纹条件  $a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3 \cdots$

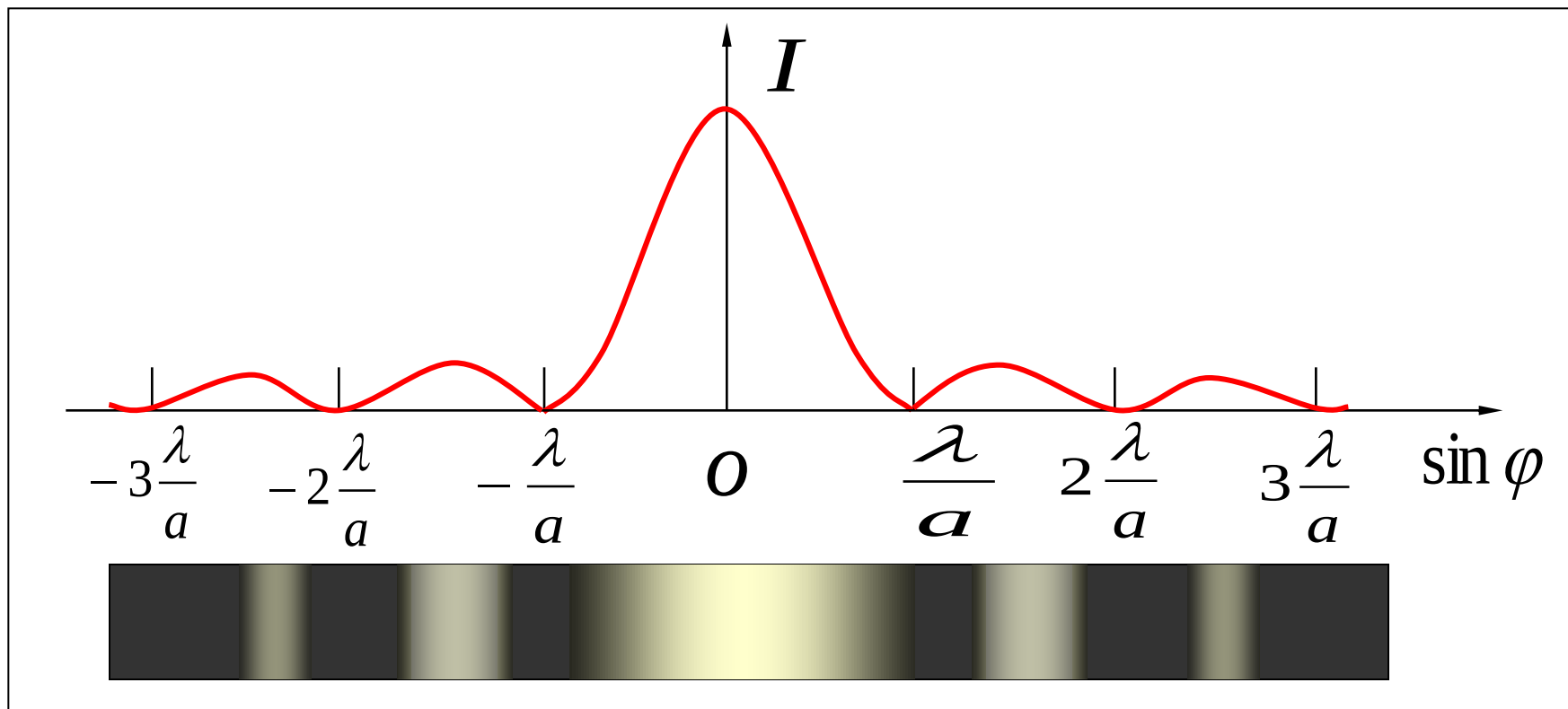


$a \sin \varphi = 3 \frac{\lambda}{2}$  此时缝分成三个“半波带”， $P$  为明纹。

明纹条件  $a \sin \varphi = \pm (2k' + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k' = 1, 2, 3 \cdots$

## 光强分布

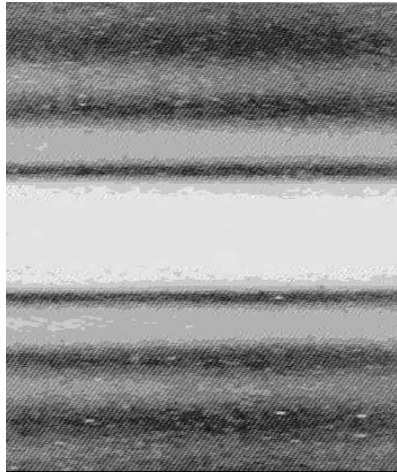
$$\left\{ \begin{array}{ll} a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda & \text{干涉相消 (暗纹)} \\ a \sin \varphi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} & \text{干涉加强 (明纹)} \end{array} \right.$$





## 说明

- (1) 得到的暗纹和中央明纹位置精确, 其它明纹位置只是近似
- (2) 单缝衍射和双缝干涉条纹比较。



单缝衍射条纹



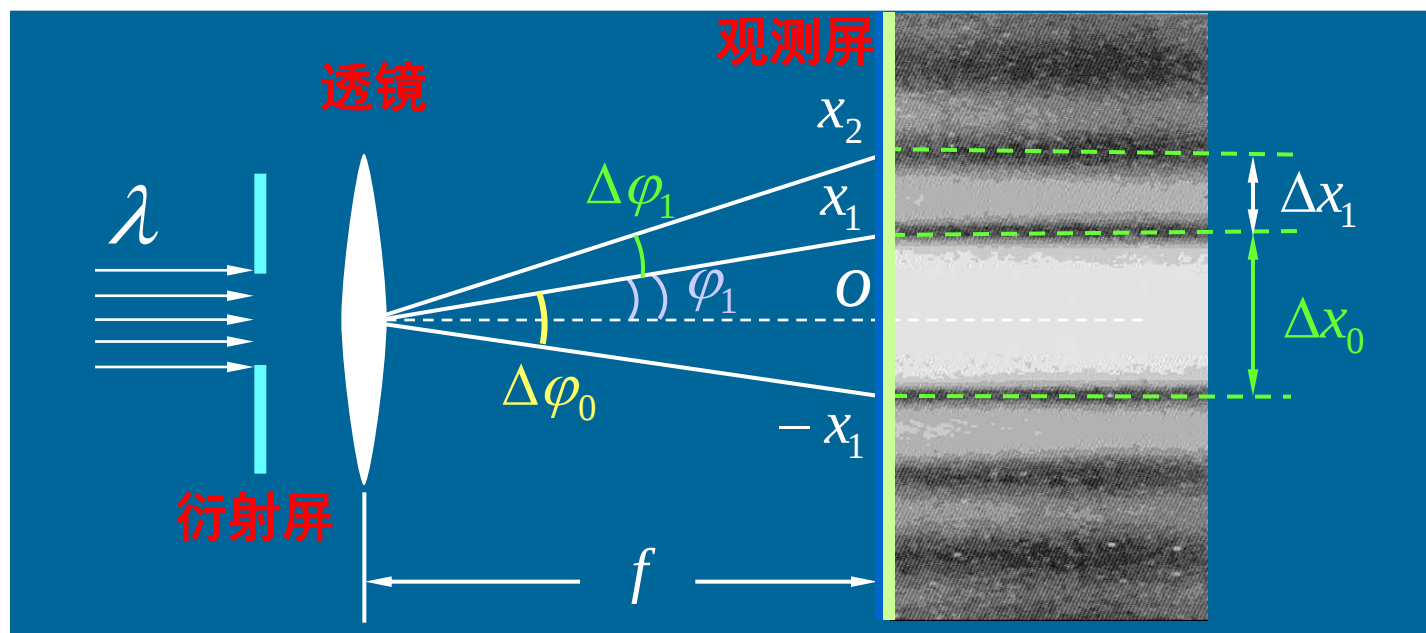
双缝干涉条纹

- (3) 实际上观察屏上光强的分布是连续的, 而且, 明纹光强随衍射级的增加而减小。

## 2. 单缝衍射明纹线宽度和角宽度

**线宽度** 观察屏上相邻两暗纹中心的间距

**角宽度** 相邻两暗纹中心对应的衍射角之差



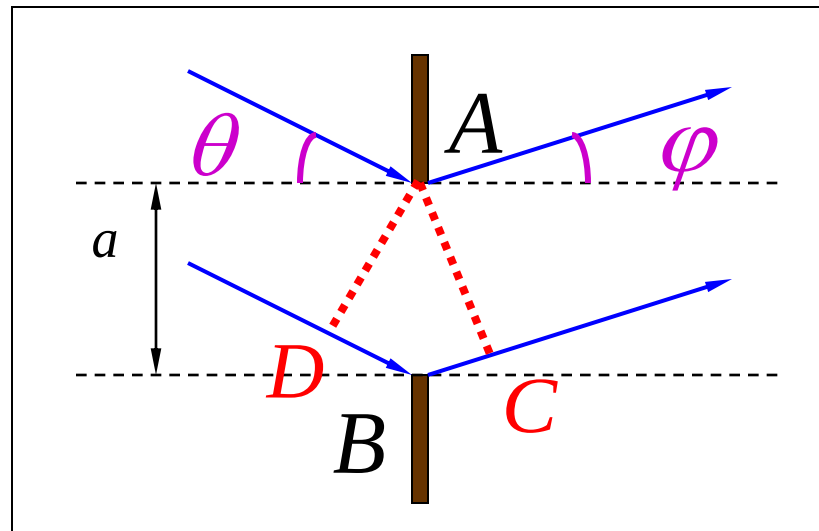
**中央明纹**    **角宽度**     $\Delta\varphi_0 = 2\varphi_1 \approx 2\lambda / a$

**线宽度**     $\Delta x_0 = 2f \cdot \tan\varphi_1 = 2f\varphi_1 = 2f\lambda / a$

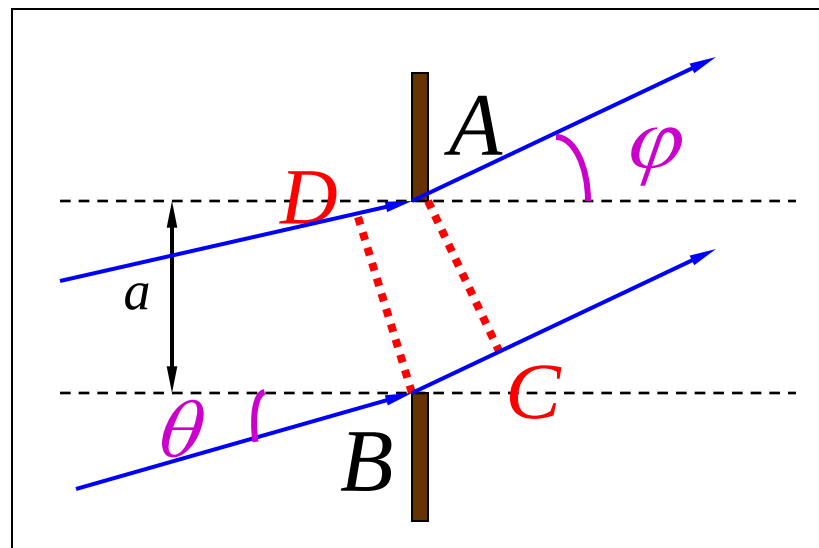
**第 $k$ 级明纹**    **角宽度**     $\Delta\varphi_k = \lambda / a$     请写出线宽度

## 入射光非垂直入射时光程差的计算

$$\begin{aligned}\delta &= DB + BC \\ &= a(\sin \varphi + \sin \theta)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\delta &= BC - DA \\ &= a(\sin \varphi - \sin \theta)\end{aligned}$$



**例** 如图示，设有一波长为  $\lambda$  的单色平面波沿着与缝平面的法线成  $\theta$  角的方向入射到宽为  $a$  的单缝  $AB$  上。

**求** 写出各级暗条纹对应的衍射角  $\varphi$  所满足的条件。

**解** 在狭缝两个边缘处，衍射角为  $\varphi$  的两光的光程差为

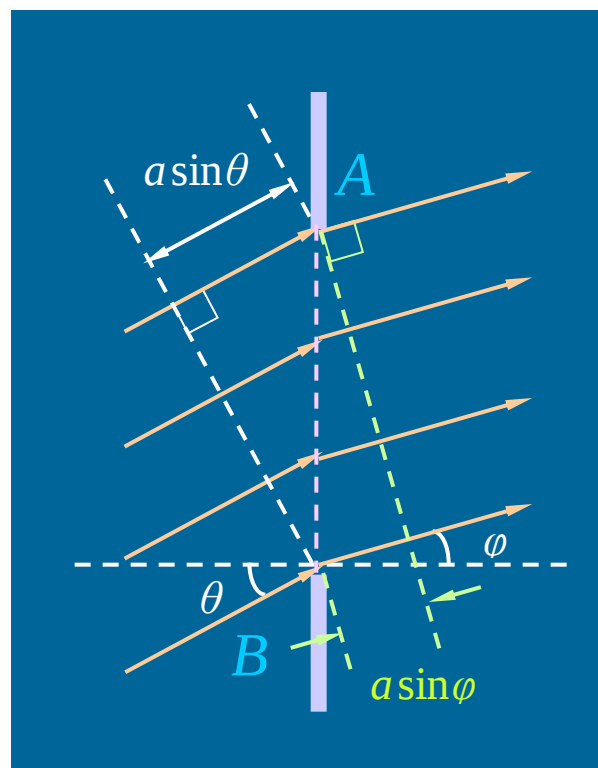
$$\Delta = a(\sin\varphi - \sin\theta)$$

对于暗纹有  $\Delta = \pm k\lambda$

$$\text{则 } a(\sin\varphi - \sin\theta) = \pm k\lambda$$

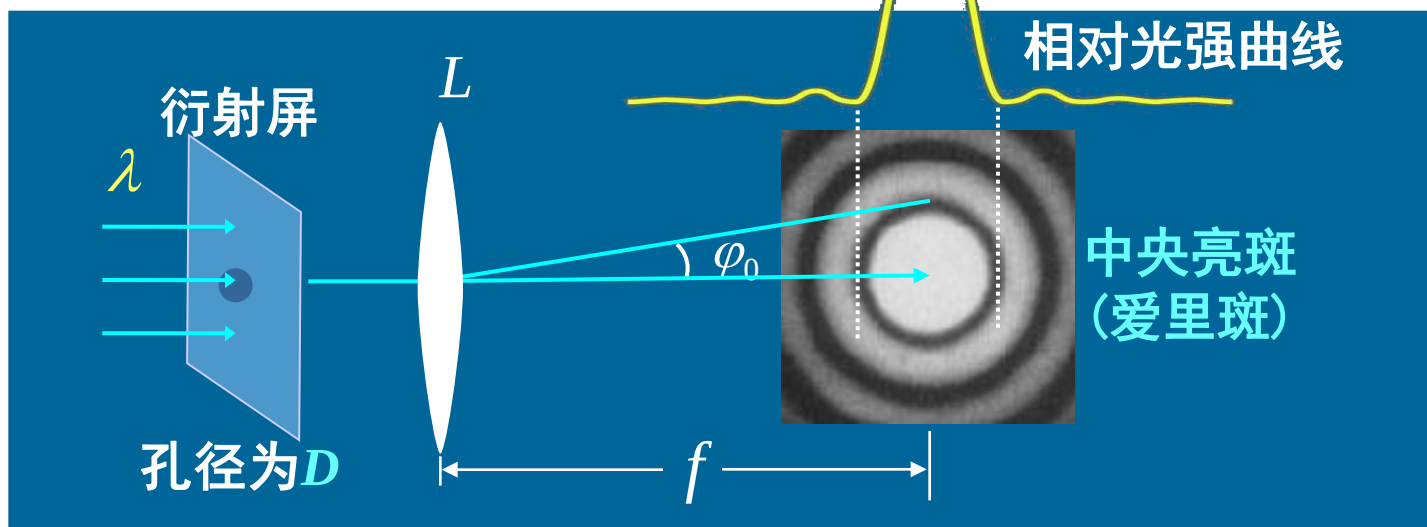
$$\sin\varphi = \pm \frac{k\lambda}{a} + \sin\theta$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots)$$



## 四. 光学仪器的分辨本领

### 1. 圆孔的夫琅禾费衍射



经圆孔衍射后, 一个点光源对应一个爱里斑

爱里斑的半角宽度为  $\varphi_0 \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$

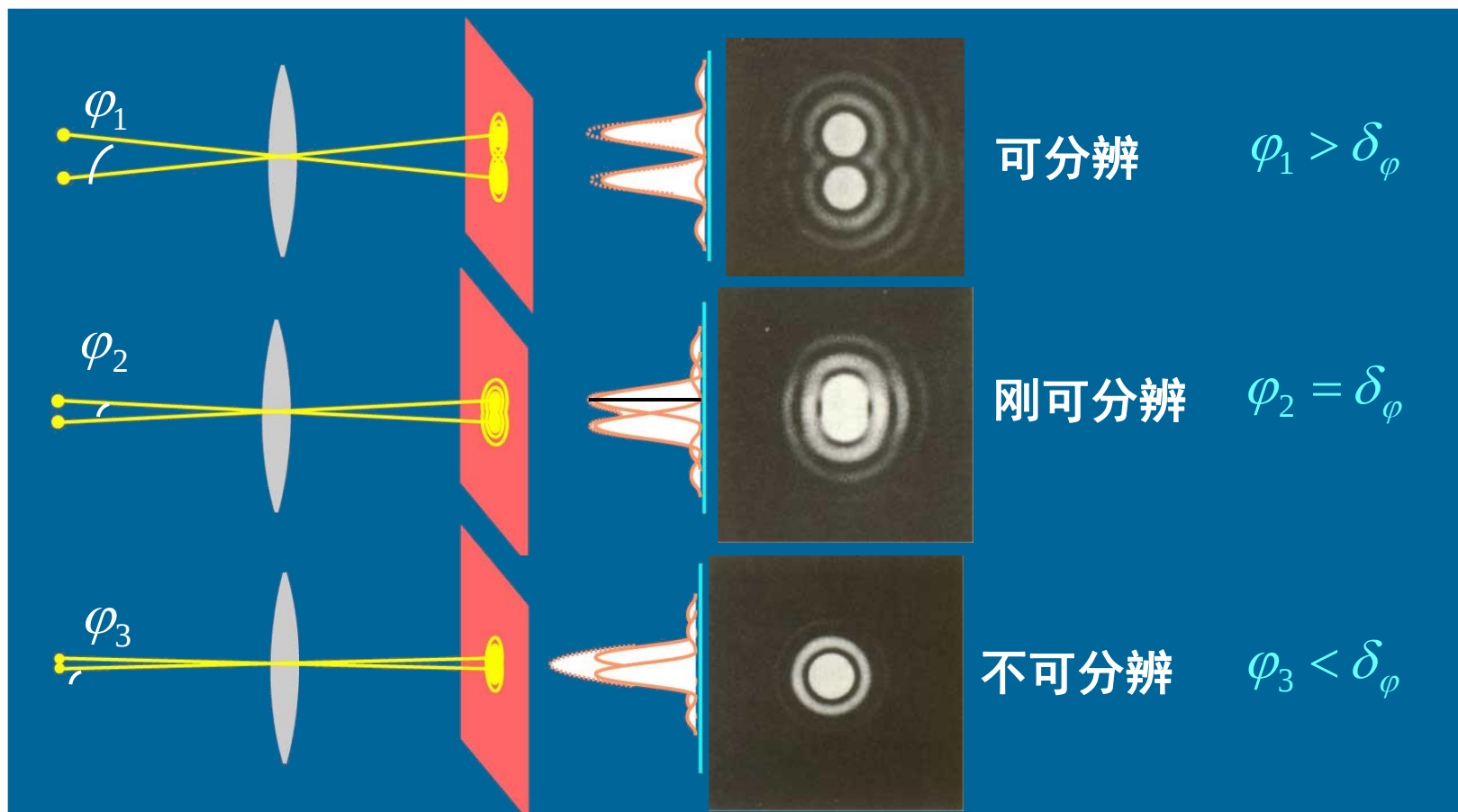
### 2. 透镜的分辨本领

几何光学

物点  $\xrightarrow{\text{一一对应}}$  像点

波动光学

物点  $\xrightarrow{\text{一一对应}}$  像斑



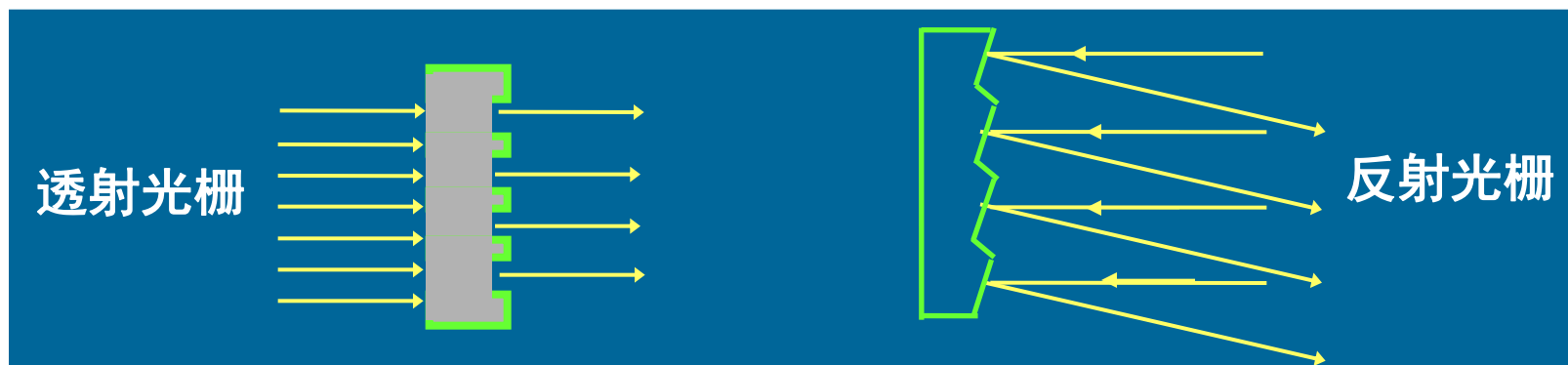
**瑞利判据:** 对于两个等光强的非相干物点, 如果一个像斑中心恰好落在另一像斑的边缘 (第一暗纹处), 则此两像被认为是刚好能分辨。此时两像斑中心角距离为 **最小分辨角**

$$\delta_\varphi = \varphi_0 \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

## § 13.3 衍射光栅

### 一. 衍射光栅

1. 光栅 大量等宽等间距的平行狭缝(或反射面)构成的光学元件

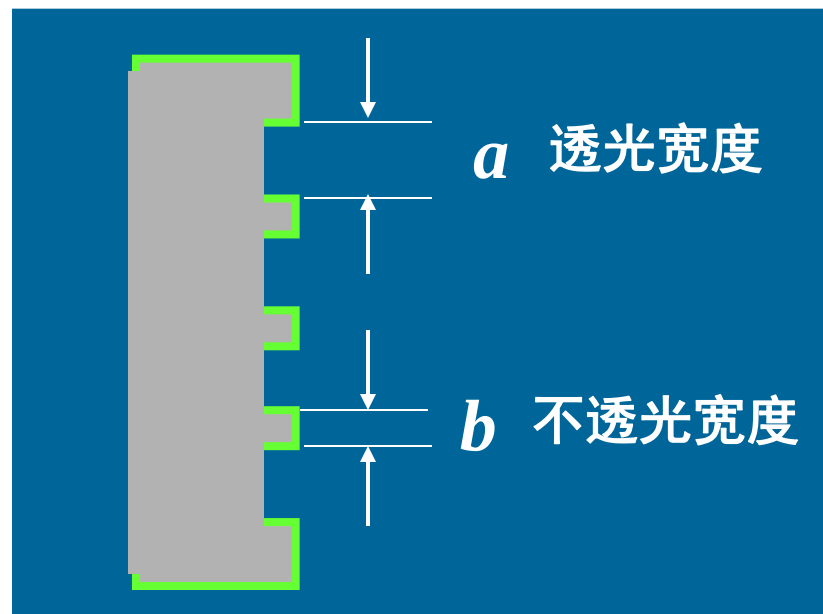


### 2. 光栅常数 $d$

$$d = a + b$$

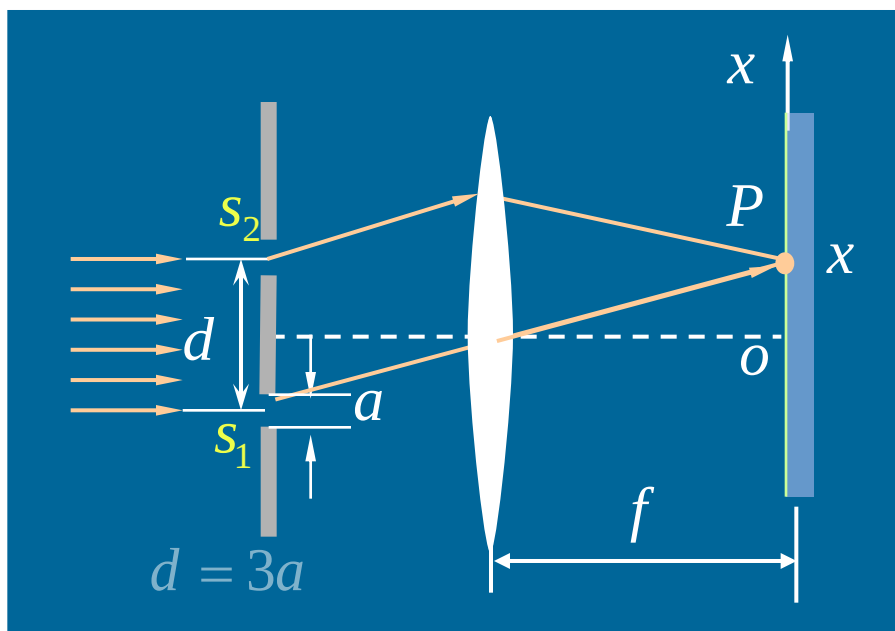
光栅宽度为  $l$ ，每毫米缝数为  $m$ ，则总缝数

$$N = m \times l$$



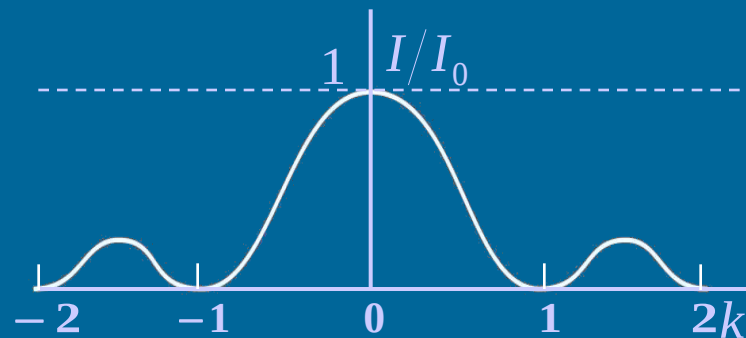
### 3. 光栅衍射的基本特点

以二缝光栅为例

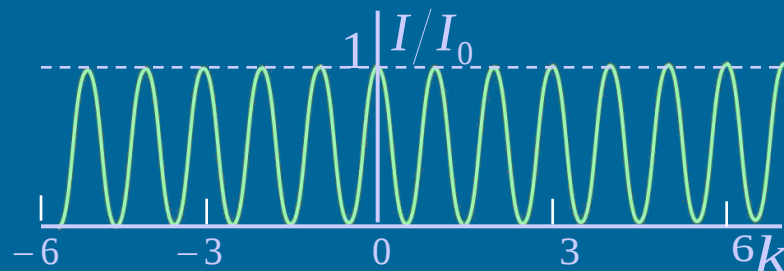


结论：

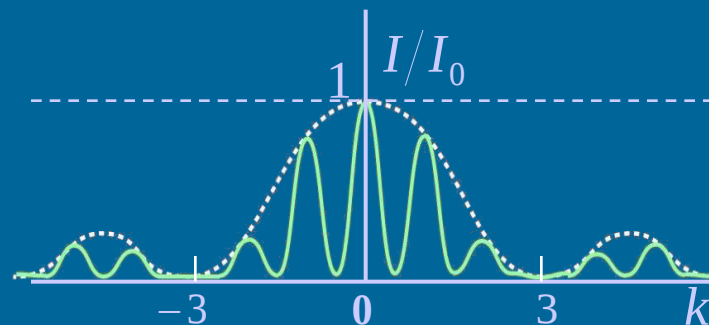
屏上的强度为**单缝衍射**和**缝间干涉**的共同结果。



只考虑单缝衍射强度分布

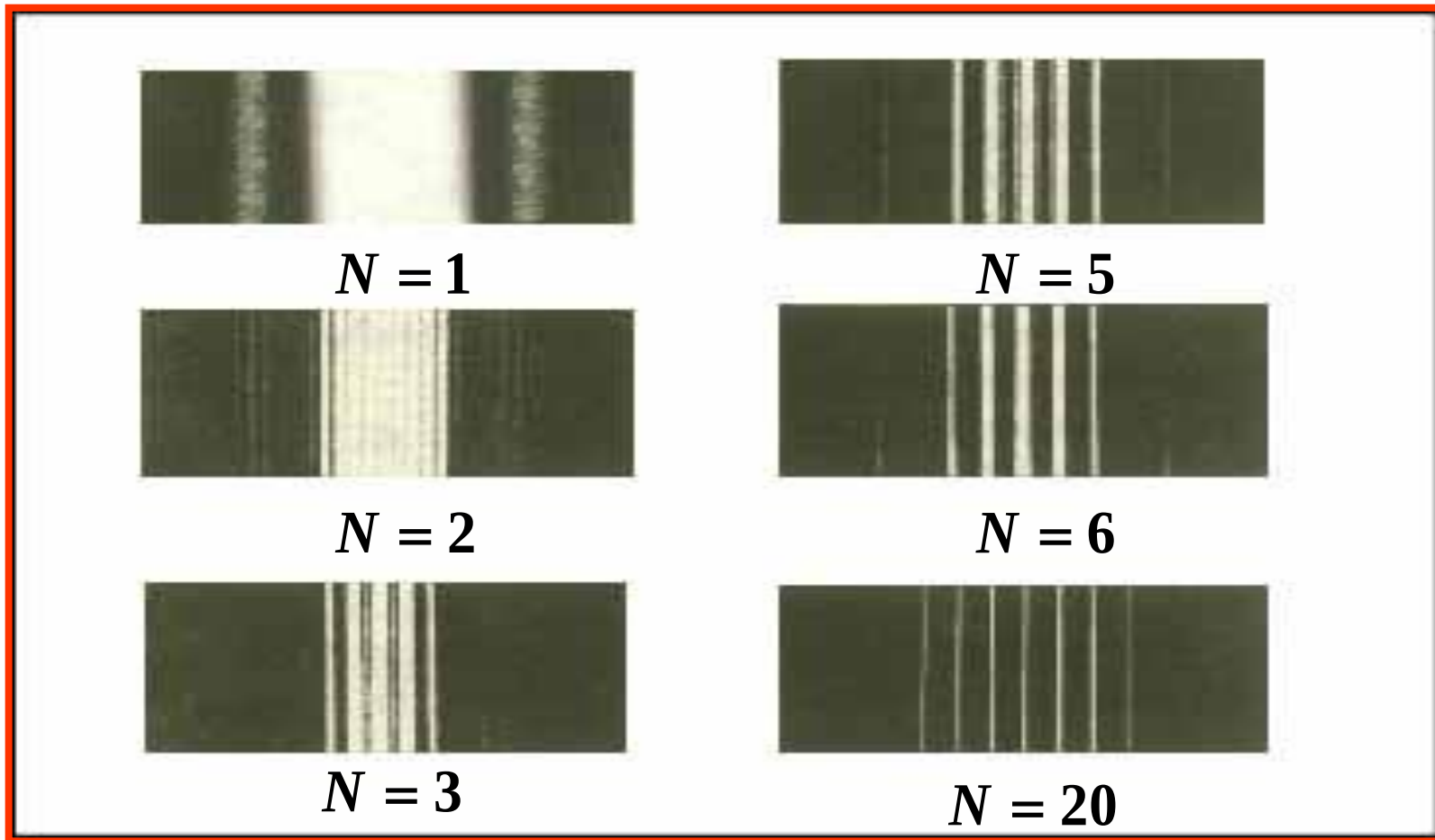


只考虑双缝干涉强度分布



双缝光栅强度分布

单缝衍射和缝间干涉的共同结果



几种缝的光栅衍射

**主要特点是：**明条纹很亮很细，明条纹之间有较暗的背景，随 $N$ 增加，明条纹越来越细，且越来越亮，而明条纹间的背景越来越暗。

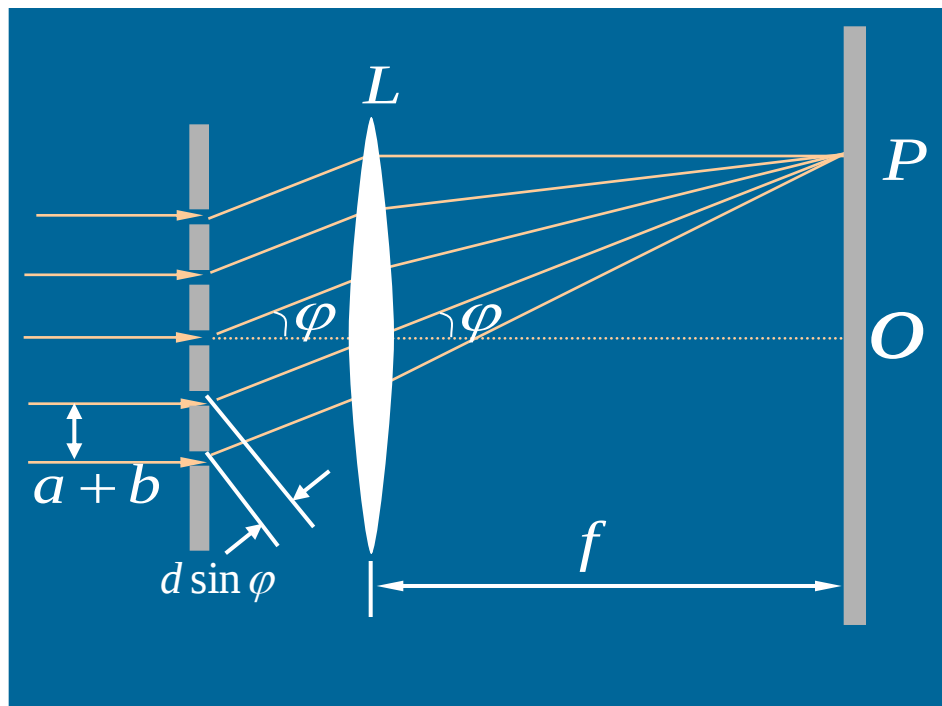
## 二. 光栅的夫琅禾费衍射

### 1. 光栅方程

光栅衍射明纹的条件  
(缝间相长干涉)

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda$$
$$k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

光栅方程



### 2. 主极大条纹

满足光栅方程的明条纹称主极大条纹，也叫光谱线

$k$  称为主极大级数



(1) 主极大条纹的位置是由缝间干涉决定的。

(2) 主极大条纹的最大级数限制:  $k < (a+b)/\lambda$

### 3. 缺级条件分析

多缝干涉主极大光强受单缝衍射光强调制，使得主极大光强大小不同，在单缝衍射光强极小处的主极大缺级。

#### 缺级条件

$$\begin{array}{l} d \sin \varphi = \pm k \lambda \\ a \sin \varphi = \pm k' \lambda \end{array} \quad \longrightarrow \quad \sin \varphi = k' \lambda / a = k \lambda / d$$

$$k = \pm k' \frac{d}{a} \quad k' = 1, 2, 3, \dots$$

如

$$\begin{array}{ll} d/a = 2 & k = \pm 2, \pm 4, \pm 6 \dots \quad \text{缺级} \\ d/a = 3 & k = \pm 3, \pm 6, \pm 9 \dots \quad \text{缺级} \end{array}$$

**说明：**光栅方程只是产生主极大条纹的必要条件，并非充分。

## 4. 暗纹条件

在光栅衍射中，两主极大条纹间分布着一些暗纹，也称极小，这是缝间干涉相消而成。

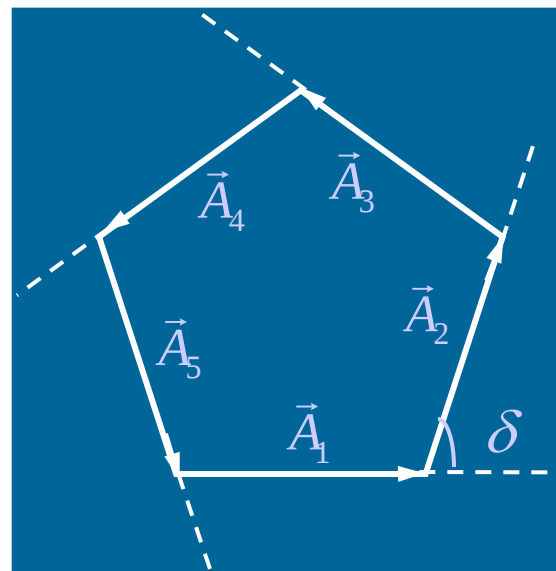
以 5 缝光栅为例说明：

各缝光振幅矢量： $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \dots, \vec{A}_5$

相邻矢量相位差： $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi$

暗纹条件  $5\delta = \pm 2m\pi$

$$5d \sin \varphi = \pm m\lambda \quad m = 1, 2, \dots, 4, 6, \dots, 9, 11, \dots$$



## ★ 结论

- (1) 对五缝干涉，相邻两主极大间有4个极小，3个次极大。
- (2) 缝间干涉+单缝衍射使得各级主极大光强大小不同。

设光栅总缝数为  $N$ ，各缝在观察屏上某点  $P$  引起的光振动矢量为

$$\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_l, \dots, \vec{A}_N$$

当这些振动矢量组成的多边形封闭时，合矢量为零，对应点为暗纹，则

**暗纹条件**  $N\delta = \pm 2m\pi$

其中  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi$  为相邻光振动矢量夹角

$$Nd \sin \varphi = \pm m\lambda \quad m = 1, 2, \dots, N-2, N-1, N+1, N+2, \dots$$

问题：为何暗区很宽，亮纹很窄？

主极大  $d \sin \varphi = \pm k \lambda \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$

极小值  $d \sin \varphi = \pm m \lambda / N$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots, (N-1), N, (N+1), (N+2), \dots, (2N-1), 2N, (2N+1), \dots$$

$(N-1)$  个极小

$(N-1)$  个极小

$k = 0$

零级极大

$k = 1$

一级极大

$k = 2$

二级极大

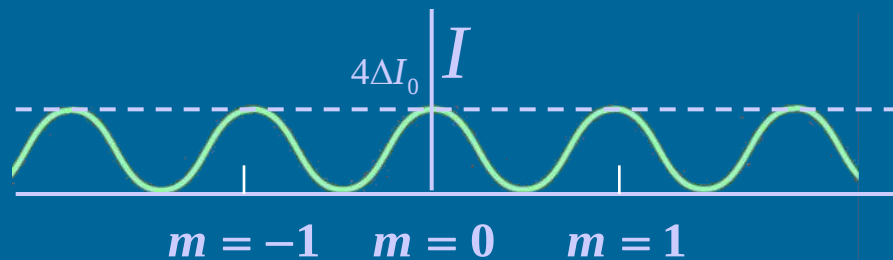
在  $k=1, k=2$  两个主极大条纹间，有  $(N-1)$  条暗纹，且暗区很宽

缝数  $N$  越多，暗区越宽，亮纹越窄。

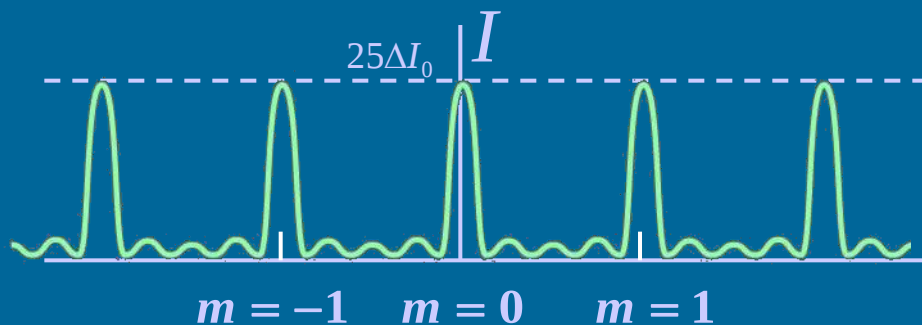
## ★ 结论

对 $N$ 缝干涉两主极大间有 $N - 1$ 个极小， $N - 2$ 个次极大。

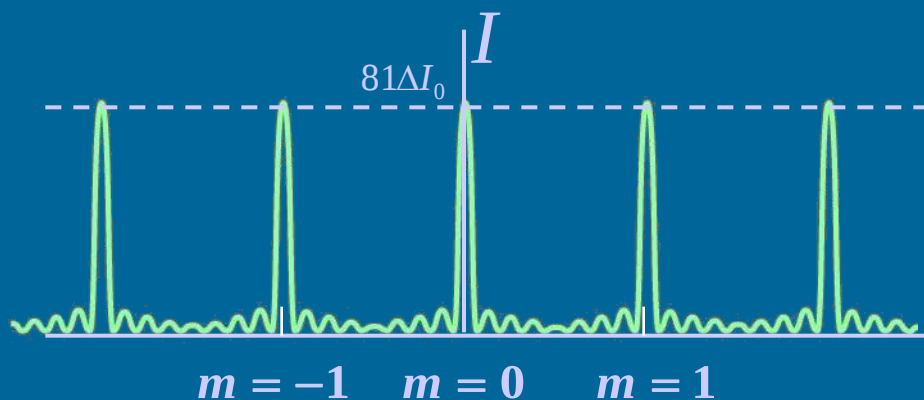
随着 $N$ 的增大，主极大变得更为尖锐，且主极大间为暗背景



$N = 2$  缝干涉强度分布

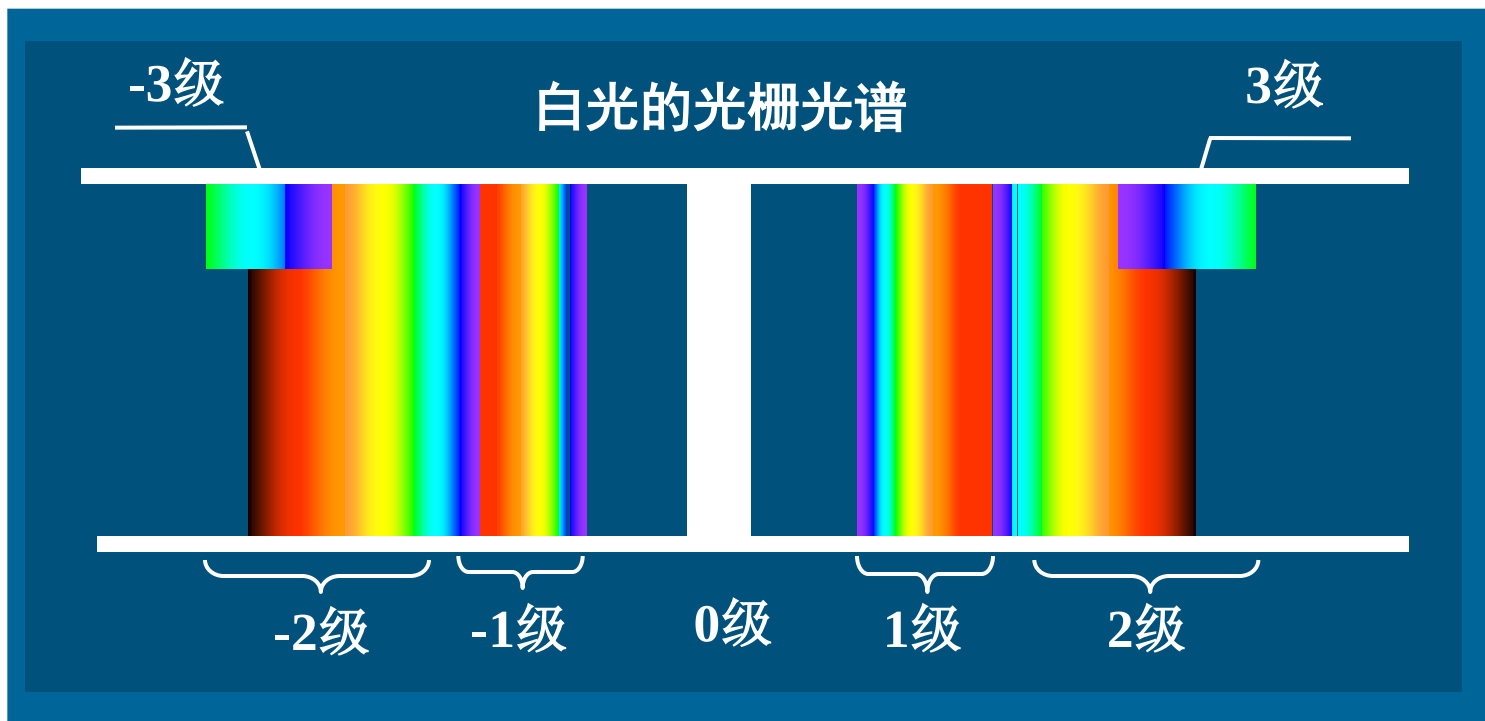


$N = 5$  缝干涉强度分布



$N = 9$  缝干涉强度分布

### 三. 光栅光谱



#### 说明:

- (1) 光栅常数一定，波长越大，条纹越疏，即各级条纹距中央零级条纹越远。
- (2) 白光垂直入射，中央为白光，两侧对称分布由紫到红的第一级、二级光谱，且在第二级出现光谱重叠。

## 四. 斜入射的光栅方程

主极大条件

$$d(\sin \varphi + \sin \theta) = \pm k\lambda$$

$$k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

缺级条件

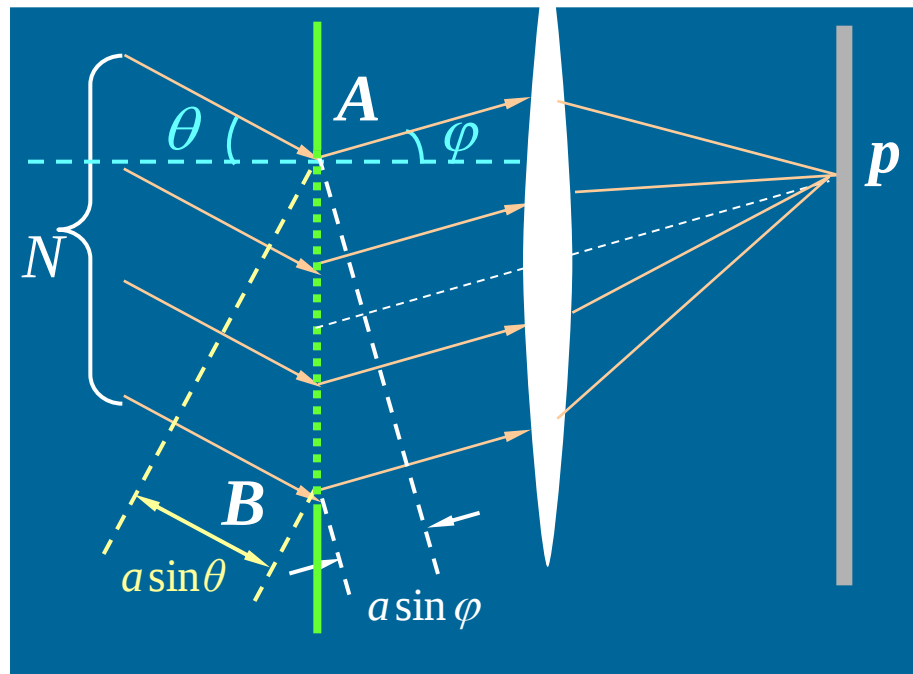
$$a(\sin \varphi + \sin \theta) = \pm k' \lambda$$

$$d(\sin \varphi + \sin \theta) = \pm k\lambda$$

最多明条纹数  $(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$

$$k_{+\max} = \left[ \frac{d}{\lambda} \left( \sin \frac{\pi}{2} + \sin \theta \right) \right] \quad k_{-\max} = \left[ \frac{d}{\lambda} \left( \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) + \sin \theta \right) \right]$$

$$\Delta N = k_{+\max} - k_{-\max} + 1$$



**例** 一束波长为 480 nm 的单色平行光，照射在每毫米内有600条刻痕的平面透射光栅上。

**求** (1) 光线垂直入射时，最多能看到第几级光谱？

(2) 光线以  $30^\circ$  入射角入射时，最多能看到第几级光谱？

**解** (1)  $d \sin \varphi = \pm k\lambda$        $d = \frac{1}{600 \times 10^3} = \frac{1}{6} \times 10^{-5} \text{ m}$

$$k_{\max} = [d/\lambda] = \left[ \frac{10^{-5}}{6 \times 4.8 \times 10^{-7}} \right] = 3$$

(2)  $d(\sin \varphi + \sin 30^\circ) = \pm k\lambda$

当  $\varphi = 90^\circ$  时  $k_{+\max} = 5$

当  $\varphi = -90^\circ$  时  $k_{-\max} = -1$

## ★ 说明

- (1) 斜入射级次分布不对称
- (2) 斜入射时，可得到更高级次的光谱，提高分辨率。
- (3) 垂直入射和斜入射相比，完整级次数不变。

上题中垂直入射级数  $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

斜入射级数  $k = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- (4) 垂直入射和斜入射相比，缺级级次相同。

$$\left. \begin{aligned} d(\sin \varphi + \sin \theta) &= \pm k \lambda \\ a(\sin \varphi + \sin \theta) &= \pm k' \lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow k = k' \frac{d}{a} \quad k' = 1, 2, 3, \dots$$

**例** 每毫米均匀刻有100条线的光栅，宽度为 $D = 10 \text{ mm}$ ，当波长为 $500 \text{ nm}$ 的平行光垂直入射时，第四级主极大谱线刚好消失，第二级主极大的光强不为0。

**求** 光栅狭缝可能的宽度；

**解** 光栅常数  $a + b = \frac{1}{100} = 1 \times 10^{-2} \text{ mm}$

第四级主极大缺级，故有  $4 = k' \frac{a+b}{a} \quad 1 \leq k' < 4$

$k' = 1$  时  $a = \frac{a+b}{4} = \frac{1 \times 10^{-2}}{4} = 2.5 \times 10^{-3} \text{ mm}$

$k' = 2$  时，第二级主极大也发生缺级，不符题意，舍去。

$k' = 3$  时，  $a = \frac{a+b}{4} \times 3 = \frac{1 \times 10^{-2}}{4} \times 3 = 7.5 \times 10^{-3} \text{ mm}$

符合题意的缝宽有两个，分别是 $2.5 \times 10^{-3} \text{ mm}$  和  $7.5 \times 10^{-3} \text{ mm}$